

## Введение

В настоящий сборник включены задания на курсовые работы по численным методам. Каждая работа представляет собой исследование и моделирование на компьютере физического явления или технического процесса, описываемого той или иной достаточно простой математической моделью на языке дифференциальных уравнений.

Все работы состоят из набора подзадач, требующих применения различных численных методов. Первый (базовый) метод во всех вариантах – это тот или иной метод численного решения задачи Коши. Без его реализации задача не может быть решена в принципе. Последующие подзадачи относятся к различным разделам численных методов. В некоторых вариантах – это методы поиска корня функции, в других – интерполяция, и так далее. Всегда можно так переформулировать исходную задачу, что применение стандартного метода потребует определенной изобретательности. Это позволяет с одной стороны, дифференцированно подходить к оцениванию работы, с другой, подстраивать уровень сложности работы под уровень студента. Обязательной частью задания является составление компьютерной программы по реализации методов и представление решения задачи в виде графиков, таблиц и т.п.

Пример организации работы описан в заключительной части сборника. Объему полноценной курсовой работы соответствует выполнение всех подзадач, включенных в каждый пункт задания.

Авторы предполагают также использовать данный сборник не только для курсовых работ, но и для различных видов учебных занятий. Первые пункты заданий можно использовать в рамках лабораторных работ по изучению численных методов решения задачи Коши. На части заданий можно отрабатывать навыки применения различных технологий программирования. В этом случае сторона, связанная с вычислительной математикой, отступает на второй план. В качестве метода можно выбрать любой стандартный метод решения задачи и сосредоточить усилия на программистских аспектах.

Постановки задач, включенных в сборник, не являются оригинальными. Часть из них заимствована из известных учебников, часть – из методических разработок коллег. К сожалению, для большинства задач невозможно указать первоисточник. В некоторых случаях задачи настолько известны, что их можно считать частью математического фольклора. Но в любом случае авторы выражают признательность тем, кто разрабатывал эти постановки до них.

Несмотря на известность постановок дифференциальных задач наборы вычислительных заданий, дополняющие их, являются авторскими.

# Движение в атмосфере Земли (баллистика)

## 1. Разлет осколков

Движение тела, брошенного (запущенного) под углом к горизонту может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = v \cos \theta + w, \\ y' = v \sin \theta, \\ \theta' = -\frac{g}{v} \cos \theta, \\ mv' = -D - mg \sin \theta \end{cases}$$

Здесь  $x(t)$ ,  $y(t)$  – текущие координаты тела,  $v(t)$  – скорость полета,  $\theta(t)$  – угол между вектором скорости и линией горизонта,  $m$  – масса тела,  $w$  – сила ветра,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения,  $D = c\rho_0 \frac{sv^2}{2}$  – аэродинамическое сопротивление, в котором  $c \leq 1$  – коэффициент сопротивления,  $s$  – площадь поперечного сечения тела,  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воздуха на уровне моря.

В качестве примера рассмотрим разлет осколков при точечном взрыве на поверхности земли.

1. Задайте массу  $m$  и начальные значения  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $v$ . Решите численно полученную задачу Коши, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет решения (в плоскости  $(x, y)$ ). Вычисления следует прекращать при достижении телом поверхности земли.

2. Постройте графики зависимости конечной скорости, дальности и времени полета от угла вылета  $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ . При этом дальность полета должна вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_x = 0.001$ . Постройте также фазовый портрет (тректории полета) всех осколков.

3. Определите с точностью  $\varepsilon_\theta = 0.01$  величину угла вылета  $\theta_0$ , при котором достигается максимальная дальность полета.

4. Добавьте в модель учет изменения плотности воздуха с высотой по барометрической формуле  $\rho(y) = \rho_0 \exp(-y/8000)$ , где  $y$  – высота в метрах. Найдите заново ответы на вопросы 2 и 3. Сравните их с предыдущими результатами.

## 2. Затяжной прыжок

Торможение свободно падающего в приповерхностном слое атмосферы тела описывается уравнением

$$my'' = -mg + D.$$

Здесь  $y(t)$  – текущая высота тела,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения,  $D = c\rho\frac{sv^2}{2}$  – аэродинамическое сопротивление, в котором  $c$  – коэффициент сопротивления,  $s$  – площадь поперечного сечения тела,  $\rho$  – плотность воздуха, равная на уровне моря  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>.

Рассмотрим движение парашютиста, совершающего затяжной прыжок с высоты  $y(0) = H$ . Считаем, что парашют начинает раскрываться в момент времени  $t_p$  и раскрывается в течение  $T$  сек. Тогда для площади поперечного сечения имеем

$$s = \begin{cases} s_0, & t \leq t_p, \\ s_0 + \frac{s_1 - s_0}{T} \cdot (t - t_p), & t_p < t \leq t_p + T, \\ s_1 & t > t_p + T \end{cases}$$

Также будем учитывать изменение плотности воздуха с высотой по барометрической формуле

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-y/8000),$$

где  $y$  – высота в метрах.

Пусть  $H = 3$  км,  $m = 80$  кг,  $s_0 = 0.3$  м<sup>2</sup>,  $s_1 = 60$  м<sup>2</sup>,  $c = 0.95$ .

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения и его производных (высоты, скорости и ускорения) от времени, а также фазовый портрет в переменных (высота, скорость). Вычисления следует прекращать при достижении парашютистом поверхности земли. При этом конечная скорость (скорость приземления) должна вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_v = 0.001$ .

2. Постройте график зависимости скорости приземления от момента раскрытия парашюта  $t_p$ .

3. Определите с точностью  $\varepsilon_t = 0.01$  максимальное значение  $t_0$ , обеспечивающее безопасную скорость приземления  $v_L = 6$  м/с.

### 3. Детективный сюжет

Шпион украл чертежи и пытается скрыться с ними на прямолинейно движущейся лодке. Но он обнаружен с экспериментального бесшумного вертолета, который уже завис над лодкой и движется над ней на постоянной высоте 1000 метров и с постоянной скоростью 50 м/с. В выбранной точке агент спрыгнет с вертолета и немедленно раскроет парашют. Он опустится на лодку, захватит шпиона, вернет чертежи и завершит сюжет.

Прыжок агента описывается следующей системой уравнений.

$$\begin{cases} x''(t) = [w(y) - x'(t)] \psi, \\ y''(t) = -g - y'(t)\psi, \end{cases}$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $x$  и  $y$  – горизонтальное смещение и высота парашютиста,  $w(y)$  – скорость ветра на высоте  $y$ , а функция  $\psi = \alpha \sqrt{[w(y) - x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ . Параметр  $\alpha$  определяется аэродинамическими характеристиками парашюта. Примем его равным 0.6.

К сожалению, точное значение функции  $w(y)$  неизвестно, и его нужно приближать в соответствии с экспериментальными данными. Вертолет оснащен калибратором, способным измерять скорость ветра на 100-метровых интервалах по всей высоте. Результаты измерений (в м/с) приведены в следующей таблице.

высота	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
скорость	-8.8	-9.2	-10.2	-12.2	-19.3	-17.6	-6.8	-1.8	1.2	2.3	3.6

Измерения калибратора можно использовать для построения кубического сплайна, интерполирующего  $w(y)$ .

Пусть лодка расположена в точке  $x = 0$ ,  $y = 0$ , а вертолет расположен вдоль линии  $y = 1000$ . В дополнение, пилот может выбрать направление таким образом, что в момент прыжка не будет встречного ветра.

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет в переменных  $(x, y)$ . Вычисления следует прекращать при достижении парашютистом поверхности земли.

2. Определите позицию вдоль оси  $y = 1000$ , где должен состояться прыжок, скорость удара, с которой агент ударится о лодку и время снижения парашюта.

#### 4. Парижская пушка

История рассказывает, что в 1918 г. во время Первой мировой войны для артиллерийских обстрелов Парижа была сконструирована гигантская по тем временам пушка калибра 200 мм, стрелявшая снарядами массой 104 кг с начальной скоростью вылета 1800 м/с.

Рассмотрим движение снаряда этой пушки с учетом сопротивления воздуха. Уравнения движения (второй закон Ньютона в декартовых координатах) будут иметь вид

$$\begin{cases} mx'' = -k\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot x', \\ my'' = -mg - k\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot y'. \end{cases}$$

Здесь  $y(t)$  – текущая высота тела,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения,  $k = c\rho\frac{sv^2}{2}$  – коэффициент торможения, в котором  $c$  – коэффициент сопротивления (для рассматриваемого снаряда  $c = 0.2$ ),  $s$  – площадь поперечного сечения тела,  $\rho$  – плотность воздуха.

Примерно в то же время было экспериментально обнаружено, что дальность полета снарядов вычисляется неправильно, если не принимать во внимание уменьшение плотности воздуха с высотой. Поэтому будем считать, что плотность воздуха изменяется с высотой по барометрической формуле

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-y/8000),$$

где  $y$  – высота в метрах,  $\rho_0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воздуха на уровне моря.

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости дальности, высоты и скорости от времени. а также фазовый портрет решения в переменных (дальность, высота), т.е. траекторию снаряда. Вычисления следует прекращать при достижении снарядом поверхности земли. При этом дальность полета должна вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_x = 0.001$ .

2. Постройте графики зависимости конечной кинетической энергии и дальности полета от угла вылета  $\alpha_0 \in [0, \pi/2)$ .

3. Определите с точностью  $\varepsilon_\alpha = 0.01$  величину угла вылета  $\alpha_0$ , при котором достигается максимальная дальность полета.

4. Сравните найденную максимальную дальность с дальностью, рассчитанной без учета изменения плотности воздуха (при том же угле вылета).

## 5. Реактивный снаряд

Реактивное движение тела у поверхности земли определяется силой тяжести  $F = mg$ , силой реактивной тяги  $P = \lambda u$ , пропорциональной скорости истечения газов из сопла двигателя  $u$  и силой сопротивления воздуха  $F_c = -cv$ , пропорциональной скорости движения тела. В декартовой системе координат уравнения реактивного движения имеют вид

$$\begin{cases} m(t)x'' = \lambda u \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - c\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot x', \\ m(t)y'' = -mg + \lambda u \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - c\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot y', \end{cases} \quad \text{при } t \leq t_m,$$

$$\begin{cases} m_k x'' = -c\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot x', \\ m_k y'' = -m_k g - c\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot y', \end{cases} \quad \text{при } t > t_m,$$

Здесь  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения,  $c$  – коэффициент сопротивления воздуха (зависит от геометрии тела),  $\lambda$  – расход топлива в секунду,  $u$  – скорость истечения газов из сопла двигателя.

Особенностью данной модели является то, что масса тела изменяется со временем. Пусть снаряд имеет собственную массу  $m_k$  и заправлен топливом массой  $m_f$ . Таким образом, начальная (стартовая) масса снаряда  $m_0 = m_k + m_f$ . Считая, что расход топлива – постоянная величина, а двигатель работает постоянно с момента старта, получаем, что полная масса снаряда будет линейно уменьшаться до момента времени  $t_m$  (в который весь запас топлива будет израсходован), а после этого станет константой. Очевидно, что это момент времени  $t_m = m_f/\lambda$ .

Пусть  $m_0 = 120 \text{ кг}$ ,  $m_k = 15 \text{ кг}$ ,  $\lambda = 10 \text{ кг/с}$ ,  $u = 1800 \text{ м/с}$ ,  $c = 0.0075 \text{ кг/м}$ , начальная скорость  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ .

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости дальности, высоты и скорости снаряда от времени, а также фазовый портрет в переменных (высота, скорость). Вычисления следует вести до достижения снарядом поверхности земли. Дальность полета должна вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_x = 0.001$ .

2. Постройте график зависимости дальности полета от массы заправленного топлива  $m_f$  при фиксированном значении угла вылета  $\alpha$ .

3. Найдите с точностью  $\varepsilon_f = 0.01$  минимальное значение массы топлива  $m_f$ , при котором дальность полета снаряда равна некоторой заданной величине  $L$ .

## 6. Упругий мяч

Мяч брошен с высоты  $H_0$  без начальной скорости. Достигнув поверхности земли, он упруго отскакивает. Пока высота мяча  $x(t)$  положительна, ее изменение описывается очевидными уравнениями

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -g, \end{cases}$$

где  $g$  – ускорение свободного падения (константа).

Если удар о поверхность земли – абсолютно упругий, то в момент удара скорость изменит знак на противоположный, но сохранит свое значение по модулю. В таком случае мяч поднимется вновь на исходную высоту и все повторится сначала. Однако в действительности в момент удара мяч теряет часть своей энергии.

Для описания этих потерь введем коэффициент потери  $k$  и будем считать, что в тот момент, когда  $x(t)$  обращается в нуль, значение скорости изменяет знак и становится равно  $-kv(t)$  (коэффициент  $0 < k < 1$  соответствует степени упругости удара о землю).

*Замечание. С технической точки зрения для изменения значения одной из компонент решения можно заново обратиться к процедуре решения с новыми начальными условиями.*

1. Выведите заданную систему ОДУ из законов механики.
2. Поставьте задачу Коши, найдите ее численное решение. Постройте график зависимости высоты мяча от времени, а также фазовый портрет в переменных (высота, скорость). Вычисления следует вести до заданного пользователем количества отскоков от земли. При этом высота последнего прыжка должна вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_x = 0.001$ .
3. Для значения начальной высоты  $H = 4$  м и коэффициента  $k = 0.7$  определить моменты первых десяти ударов о землю и высоты первых десяти прыжков.
4. Найти с точностью  $\varepsilon_t = 10^{-4}$  момент времени, в который будет в 5-й раз достигнута высота  $H_0/2$ .
5. Найдите значение коэффициента потери  $k$ , при котором высота  $N$ -го прыжка ( $N$  задает пользователь) составляет не более 1% начальной высоты мяча.
6. Решить ту же задачу, изменив модель удара о землю на следующую. В тот момент, когда  $x(t)$  обращается в нуль, значение скорости изменяет знак и становится равно  $-k|v(t)|^{0.9}$ .

## Движение в гравитационном поле

### 7. Движение в центральном поле

Движение точечного тела массы  $m$  в поле тяготения, создаваемом массой  $M$  определяется силой притяжения, равной

$$\vec{F} = \gamma M m r^\alpha \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – радиус-вектор тела ( $x$  и  $y$  – декартовы координаты в системе с центром координат, расположенном в центре притяжения).

В классической Ньютоновской механике показатель  $\alpha = -2$ . Гравитационная постоянная  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^3)$ .

Пусть  $m = 1$  и в начальный момент времени  $t = 0$  тело находится на расстоянии  $R_0$  и имеет скорость  $v_0$ , перпендикулярную радиус-вектору.

В качестве источника притяжения возьмем Землю, но будем считать, что вся ее масса сосредоточена в центре (масса Земли  $M_3 = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ , радиус Земли  $R_3 = 6371 \text{ км}$ ).

1. Используя второй закон Ньютона, составьте дифференциальные уравнения для описания изменения декартовых координат тела. Используя указанные выше начальные данные, поставьте задачу Коши для полученной системы ОДУ.

2. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет решения в переменных  $(x, y)$ . (На фазовом портрете изобразите окружность-Землю.) При достижении спутником поверхности Земли или при удалении его далее  $100R_0$  вычисления следует прекращать и выдавать соответствующее уведомление.

3. Реализуйте процедуру численного анализа полученного решения с целью выяснения его периодичности. При положительном результате определите период вращения спутника. Зная точность решения задачи Коши, оцените точность определения периода вращения.

4. Для каждой замкнутой траектории определяйте степень ее близости к окружности (меру близости определите самостоятельно).

5. Реализуйте процедуру поиска величины начальной скорости, при которой орбита является круговой.

6. Про моделировать движение спутника при других значениях параметра  $\alpha$ .



## 8. Притяжение двух тел

Сферические однородные тела массами  $m$  и  $M$  притягиваются друг к другу с силой

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

направленной вдоль прямой, соединяющей центры тел. Здесь  $R$  – расстояние между центрами тел,  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  – гравитационная постоянная.

В качестве системы таких тел рассмотрим систему Земля – Луна. Для нее  $M = M_3 = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ ,  $m = m_{\text{л}} = 7,348 \cdot 10^{22} \text{ кг}$ , среднее расстояние  $R_0 = 384400 \text{ км}$  ( $r_3 = 6371 \text{ км}$ ,  $r_{\text{л}} = 1737 \text{ км}$ ).

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  тела имеют начальные скорости  $V_0$  (Земля) и  $v_0$  (Луна), направленные перпендикулярно прямой, соединяющей центры тел.

1. Используя второй закон Ньютона, составьте дифференциальные уравнения для описания изменения декартовых координат центров обоих тел. Начало координат удобно поместить в центр масс системы, ось  $X$  направить в сторону Земли. Используя указанные выше начальные данные, поставьте задачу Коши для полученной системы ОДУ.

2. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет решения. (На фазовом портрете изобразите Землю и Луну в виде окружностей.) При соприкосновении тел поверхностями или при удалении друг от друга далее  $100R_0$  вычисления следует прекращать и выдавать соответствующее уведомление.

3. Реализуйте процедуру численного анализа полученного решения с целью выяснения его периодичности. При положительном результате определите период вращения системы. Зная точность решения задачи Коши, оцените точность определения периода вращения.

4. Реализуйте процедуру пересчета положения Луны в систему координат, связанную с неподвижной Землей. Постройте фазовый портрет решения в новых координатах  $(\tilde{x}_{\text{л}}, \tilde{y}_{\text{л}})$ .

5. Промоделируйте движение системы тел при других значениях массы меньшего из них (легкая или тяжелая луна). В том числе рассмотрите случай двух тел равной массы.

## 9. Комета Галлея

Очередной вехой в исследовании космоса стал 1986 год. 9 февраля того года комета Галлея проходила свой перигелий (ближайшую к Солнцу точку орбиты). На встречу с ней были направлены две советские межпланетные станции Вега-1 и Вега-2 и европейский зонд Джотто.

Попробуем рассчитать упрощенную траекторию кометы. Для описания ее движения введем трехмерную прямоугольную декартову систему координат. В начале координат расположим Солнце. Координаты  $p = (x, y, z)$  и компоненты скорости  $v = (v_x, v_y, v_z)$  кометы Галлея в перигелии были равны соответственно

$$\begin{aligned} p_0 &= (0.325514, -0.459460, 0.166229), \\ v_0 &= (-9.096111, -6.916686, -1.305721). \end{aligned}$$

Расстояние здесь выражено в астрономических единицах длины (а.е.), а время – в годах. При этом точное значение а.е. (в метрах), связанное со специальным усреднением расстояния от Земли до Солнца, не требуется. В указанных единицах измерения трехмерные уравнения движения кометы имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3}, \end{cases}$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\mu = 4\pi^2$ . Влияние планет на орбиту кометы считается здесь несущественным (хотя это достаточно сильное упрощение).

1. Решите численно сформулированную задачу Коши, постройте графики зависимости координат от времени, а также фазовые портреты решения (т.е. проекции на плоскости  $yz$ ,  $xy$  и  $xz$ ).

2. Определите дату прохождения кометы через афелий (наиболее удаленную от Солнца точку орбиты). Определите время, за которое комета снова вернется в перигелий.

3. Проанализируйте полученное решение на предмет его периодичности. Предложите способ и определите с его помощью период обращения кометы. Сопоставьте найденный период с датами наблюдения кометы английским астрономом Э. Галлеем и итальянским живописцем Джотто, а также с непосредственным расчетом назад по времени.

4. Оцените погрешность найденного в п. 3 периода.

## 10. Прилунение

Рассмотрим процесс сближения космического аппарата с Луной в условиях, когда притяжением других тел Солнечной системы можно пренебречь. В этих условиях движение аппарата будет определяться лунной силой тяжести  $F = mg$ , для которой  $g = 1.62 \text{ м/с}^2$ , а также силой тяги собственного реактивного двигателя аппарата.

Пусть начальная масса аппарата  $m_0 = 100 \text{ кг}$  и она уменьшается по мере расхода топлива. Предположим, что запас топлива равен  $m_F = 100 \text{ кг}$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  аппарат находится на расстоянии  $R_0 = 10\,000 \text{ км}$  от центра Луны (радиус Луны  $R_{\text{Л}} = 1737 \text{ км}$ ) и имеет скорость  $v_0$ , направленную перпендикулярно к направлению на Луну. Расход топлива в единицу времени  $\frac{d\mu}{dt} = q = \text{const}$  может задаваться на нужном уровне. Скорость истечения рабочих газов из сопла реактивного двигателя примерно равна  $u = 2 \text{ км/с}$ . Двигатель включается в начальный момент времени и создает тормозящее усилие до момента прилунения или до полного израсходования топлива.

Задание.

1. Используя второй закон Ньютона, составьте дифференциальные уравнения для описания изменения декартовых координат аппарата. Используя указанные выше начальные данные, поставьте задачу Коши для полученной системы ОДУ.

2. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет решения (траекторию аппарата). Вычисления следует вести до момента достижения лунной поверхности.

3. Постройте график зависимости полной массы затраченного топлива  $\mu_F$  от расхода  $q$  для прилунения в произвольной точке лунной поверхности. При этом выдавайте информацию (например, цветом графика) о том, была ли посадка мягкой, исходя из безопасной скорости удара о поверхность  $10 \text{ м/с}$ .

4. Определите (с задаваемой точностью) расход топлива  $q$ , обеспечивающий посадку в точку с координатами  $(-R_{\text{Л}}, 0)$ .

5. При найденном в п. 4 значении  $q$  вычислите полную массу затраченного топлива и время полета от начальной точки до достижения поверхности.

6. Пользуясь результатами п. 3, определите минимальное количество затраченного топлива, необходимое для совершения посадки в произвольной точке.

## 11. Планета двойной звезды

Рассмотрим движение планеты в поле притяжения двойной звезды.

Пусть две звезды равной массы вращаются по круговой орбите вокруг центра масс. В плоскости вращения звезд движется планета, масса которой много меньше массы звезд и ее влиянием на движение звезд можно пренебречь.

Введем прямоугольную систему координат, вращающуюся вместе со звездами, так что звезды в этой системе будут неподвижны. Центр координат расположим в центре масс системы двух звезд, ось  $X$  проведем через их центры. Все тела будем считать точечными.

Пусть произведение гравитационной постоянной на массу одной звезды  $\gamma M = 100$  условных единиц (у.е.). Пусть также масса планеты  $m = 1$  у.е. и в начальный момент времени  $t = 0$  планета находится на расстоянии  $R$  от центра масс и имеет скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\beta$  к оси  $X$ , а радиус-вектор {центр координат – планета} направлен под углом  $\alpha$  к оси  $X$ .

1. Используя второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, составьте дифференциальные уравнения для описания изменения прямоугольных координат планеты. Используя указанные выше начальные данные, поставьте задачу Коши для полученной системы ОДУ.

2. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет решения (траекторию планеты). При встрече планеты и звезды или при удалении планеты от центра масс системы далее  $100R$  вычисления следует прекращать и выдавать соответствующее уведомление.

3. Реализуйте процедуру численного анализа полученного решения с целью выяснения его периодичности. При положительном результате определите период вращения планеты. Зная точность решения задачи Коши, оцените точность определения периода вращения.

4. Численно исследуйте устойчивость траектории движения планеты. Для этого следует провести расчет (и вывести графики) двух решений с мало отличающимися начальными данными и проанализировать норму разности полученных решений.

5. Промоделируйте ситуации (попробуйте подобрать подходящие начальные данные), в которых планета является спутником либо одной, либо обеих звезд.

## 12. От Земли до Луны

Движение малого тела (материальной точки) по орбите около двух массивных тел описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' = 2y' + x - \frac{\tilde{\mu}(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \tilde{\mu})}{r_2^3}, \\ y'' = -2x' + y - \frac{\tilde{\mu}y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \end{cases}$$

где  $\mu = \frac{1}{82.45}$ ,  $\tilde{\mu} = 1 - \mu$ ,  $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$ ,  $r_2^2 = (x - \tilde{\mu})^2 + y^2$ .

Уравнения записаны во вращающейся системе координат, связанной с вращением одного массивного тела вокруг другого так, что оба являются в ней неподвижными. Такая система координат, как известно, не является инерциальной. Этим объясняется наличие дополнительных слагаемых (не связанных с законом всемирного тяготения) в правых частях уравнений.

Начало координат находится в центре масс двух тяжелых тел. Ось проходит через их центры, а расстояние между телами принимается за единицу. Если обозначить за  $\mu$  отношение масс менее и более массивного тел, то эти тела будут расположены в точках с координатами  $(1 - \mu, 0)$  и  $(-\mu, 0)$  соответственно. (Выше приведено значение  $\mu$  для системы Земля – Луна.) Положение третьего тела (материальной точки) есть функции времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ , являющиеся решением приведенной системы ОДУ.

Пусть в начальный момент времени третье тело (спутник) находится в точке с координатами  $x(0) = 1.2$ ,  $y(0) = 0$  и имеет скорость с компонентами  $v_x(0) = 0$ ,  $v_y(0) = -1.04935751$ .

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики решения  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а также фазовый портрет (в переменных  $x$ ,  $y$ ).

2. Реализуйте процедуру численного анализа полученного решения с целью выяснения его периодичности. При положительном результате определите период вращения спутника. Зная точность решения задачи Коши, оцените точность определения периода вращения.

3. Промоделируйте движение с другими начальными данными. Попробуйте построить траектории, начинающиеся на одном теле и заканчивающиеся на другом.

### 13. Астронавигация

Три больших астероида будут находиться в окрестности космического корабля в течение десятичасового периода времени. Нужно вычислить траектории трех астероидов в течение этого периода, чтобы помочь штурману избежать столкновения с ними. Астероиды движутся в одной плоскости, поэтому достаточно рассмотреть двумерную задачу.

В начальный момент времени астероид  $A$  массой  $3 \times 10^{19}$  кг расположен в точке с координатами  $(100\,000, 100\,000)$  (в метрах). Астероиды  $B$  массой  $1 \times 10^{19}$  кг и  $C$  массой  $2 \times 10^{19}$  кг находятся в точках  $(100\,000, 900\,000)$  и  $(900\,000, 900\,000)$  соответственно. Изначально астероид  $B$  движется по прямой к  $A$  со скоростью  $100\,000$  м/ч. Астероид  $C$  движется к  $B$  со скоростью  $40\,000$  м/ч и  $A$  движется по линии, параллельной прямой  $BC$  в направлении  $C$  со скоростью  $150\,000$  м/ч.

Если пренебречь всеми силами кроме гравитационных сил астероидов, то получается классическая задача 3-х тел. Обозначим через  $s_k$  положение  $k$ -го астероида. Тогда их движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида.

$$\begin{cases} m_1 s_1'' = f_{12}(s_2 - s_1) + f_{13}(s_3 - s_1), \\ m_2 s_2'' = f_{12}(s_1 - s_2) + f_{23}(s_3 - s_2), \\ m_3 s_3'' = f_{13}(s_1 - s_3) + f_{23}(s_2 - s_3). \end{cases}$$

Здесь  $m_k$  – массы астероидов,  $r_{kj}$  – расстояние между  $k$ -м и  $j$ -м астероидами в момент времени  $t$ . Коэффициенты  $f_{kj}$  возникают из закона всемирного тяготения и равны  $f_{kj} = G \frac{m_k m_j}{r_{kj}^3}$ , где  $G = 8.6443 \times 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{час}^2 \cdot \text{кг}}$ .

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики решения  $x_k(t)$ ,  $y_k(t)$ . Вычисления требуется проводить в течение 10-ти часового периода, после которого космический корабль покинет опасную зону.

2. Постройте фазовый портрет системы (в переменных  $x$ ,  $y$ ), т.е. траектории движения всех трех астероидов.

3. Найдите хотя бы одну прямолинейную траекторию (прямую вида  $y = kx$ ), двигаясь вдоль которой с постоянной скоростью  $u$ , космический корабль непременно столкнется с одним из астероидов.

## Колебания

### 14. Затухающие колебания

Многие колебательные системы с затуханием можно описать следующим модельным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}.$$

Здесь  $\omega$  – циклическая частота колебаний,  $\gamma$  – коэффициент затухания.

Простейший пример такой системы – движение грузика на пружине по прямой в горизонтальной плоскости по негладкой поверхности. В этом случае величина  $x(t)$  показывает смещение из положения равновесия ( $x = 0$ ). Первое слагаемое в правой части есть сила упругости (закон Гука), а второе – сила трения.

Рассмотрим движение, вызванное выведением шарика из положения равновесия (например, в точку  $x(0) = 1$ ) и отпусканием без начальной скорости.

1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу при произвольных (задаваемых пользователем) значениях  $\omega$  и  $\gamma$ . Постройте графики зависимости отклонения и скорости от времени. При этом точность расчета первого прохождения точки равновесия должна быть не хуже  $\varepsilon_0 = 0.00001$ .

2. Постройте также фазовый портрет решения в координатах (смещение, скорость).

3. Решите задачу для значения параметра  $\omega = 3$ , и нескольких значений  $\gamma$  в диапазоне от 0 до 8. Постройте (на одном поле) графики зависимости отклонения и скорости от времени.

4. Определите функцию  $G(\gamma)$ , которая принимает значение 1, если переход к положению равновесия происходит монотонно (т.е. отсутствуют колебания решения), и 0 в противоположном случае. Протабулируйте эту функцию (с заданным пользователем шагом) на отрезке  $\gamma \in [0, 8]$ .

5. Предложите и реализуйте алгоритм автоматического поиска точки разрыва этой функции.

6. Решите ту же задачу для другой начальной ситуации, в которой шарик стартует из положения равновесия с начальной скоростью  $v_0$ .

## 15. Колебания на двух пружинах

Рассмотрим движение шарика массы  $m$  по горизонтальной поверхности под действием сил упругости.

Шарик прикреплен двумя пружинами к двум взаимно перпендикулярным стенкам. Пружины имеют одинаковую длину  $l$  и коэффициенты жесткости  $k_x$  и  $k_y$ , точки крепления пружин к стенкам имеют координаты  $(0, -l)$  и  $(-l, 0)$ . В свободном (нерастянутом) состоянии пружины взаимно перпендикулярны, при этом шарик располагается в начале координат.

В начальный момент времени шарик перемещают в точку  $(x_0, y_0)$  и отпускают.

При отсутствии трения движение шарика описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} mx'' = -k_x(l+x) \frac{\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}} - k_y x \frac{\sqrt{x^2 + (l+y)^2} - l}{\sqrt{x^2 + (l+y)^2}}, \\ my'' = -k_x y \frac{\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}} - k_y(l+y) \frac{\sqrt{x^2 + (l+y)^2} - l}{\sqrt{x^2 + (l+y)^2}}, \end{cases}$$

Примем для первичного моделирования  $l = 1$  м,  $k_x = 50$  Н/м,  $k_y = 100$  Н/м, коэффициент трения скольжения шарика по поверхности  $\mu = 0$  (трения нет) или  $\mu = 0.2$  (среднее значение для металлических поверхностей).

1. Добавьте в уравнения системы слагаемые, определяемые силой трения о горизонтальную поверхность  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu m g \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

2. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу. Вычисления следует проводить до полной остановки шарика. При этом конечные положение и скорость должны вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_d = 0.001$ .

3. Постройте график зависимости координат шарика от времени, а также фазовый портрет системы в переменных  $(x, y)$ .

4. Постройте график зависимости времени колебаний (до полной остановки)  $T$  от величины коэффициента трения  $\mu$ .

5. Найдите с точностью  $\varepsilon_\mu = 0.01$  минимальное значение коэффициента трения, при котором возврат в положение равновесия происходит монотонно, т.е. шарик не переходит через точку равновесия.



## 16. Маятник Фуко

Рассмотрим сферический маятник массы  $m$  и длины  $l$  (достаточно большой), совершающий малые колебания вблизи поверхности Земли, с учетом ее вращения (маятник Фуко). Введем декартову систему координат в плоскости, касательной к поверхности Земли в точке подвеса, эта точка будет началом координат. Ось  $Y$  направим по касательной к меридиану на юг, а ось  $X$  – по касательной к параллели на восток, ось  $Z$  – вертикально вниз.

На маятник действуют сила тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$ , направленная вертикально вниз, сила реакции (натяжения) нити  $\vec{N} = \left(-N\frac{x}{l}, -N\frac{y}{l}, -N\frac{z}{l}\right)^T$  и сила Кориолиса (инерции)  $\vec{J} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]$ , где  $(x, y, z)$  – координаты тела,  $\vec{v}$  – его скорость,  $\vec{\omega} = (0, -\omega \cos \varphi, -\omega \sin \varphi)^T$  – угловая скорость вращения Земли на широте  $\varphi$  (на которой подвешен маятник). Величина  $\omega = 0.0635$ , если время измеряется в часах.

Если пренебрегать изменениями высоты тела в виду малости колебаний (по сравнению с длиной подвеса  $l$ ), то для положения маятника в плоскости Земли  $x(t)$ ,  $y(t)$  получается система уравнений

$$\begin{cases} x'' = -\frac{gx}{l} - 2\omega \sin \varphi \cdot y', \\ y'' = -\frac{gy}{l} - 2\omega \sin \varphi \cdot x'. \end{cases}$$

Будем рассматривать два варианта движения.

А) В начальный момент времени маятник отклонен от положения равновесия на угол  $\alpha_0$  и свободно отпускается.

В) В начальный момент времени маятник находится в положении равновесия (угол отклонения  $\alpha_0 = 0$ ) и ему сообщается начальная скорость  $v_0$ , направленная вдоль оси  $X$ .

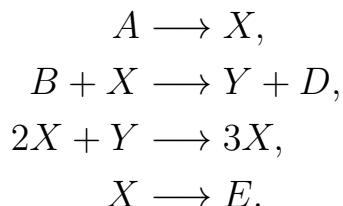
1. Составьте эквивалентную систему ОДУ первого порядка, поставьте для нее задачу Коши. Решите численно полученную задачу, постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет в переменных  $(x, y)$ . Вычисления следует проводить до заданного момента времени  $T$ . При этом конечное положение  $(x(T), y(T))$  должно вычисляться с точностью не хуже  $\varepsilon_x = 0.001$ .

2. Постройте график зависимости координат от времени, а также фазовый портрет системы в переменных  $(x, y)$ .

3. Определите начальные условия  $\alpha_0 \neq 0$  и  $v_0$ , при которых маятник будет проходить через точку равновесия.

## 17. Автоколебания в химических реакциях

Модель Лефевра – Николиса описывает колебательные процессы в следующей цепочке химических реакций



Предполагается, что концентрации веществ  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  остаются постоянными и все реакции необратимы. Тогда изменение концентрации  $x$  и  $y$  реагентов  $X$  и  $Y$  будет описываться следующей системой ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b + 1)x + x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2y, \end{cases}$$

Здесь  $a$  и  $b$  – неизменные концентрации исходных веществ  $A$  и  $B$  соответственно.

1. Поставьте для выписанной системы уравнений задачу Коши. Решите численно полученную задачу при различных значениях коэффициентов. Постройте графики зависимости решения от времени, а также фазовый портрет в переменных  $(x, y)$ . В качестве начальных данных попробуйте взять значения  $x(0) = 10^6$ ,  $y(0) = 3.7 \cdot 10^{16}$ ,  $z(0) = 10^{12}$ .

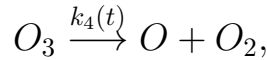
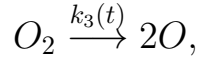
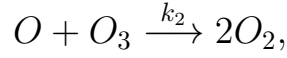
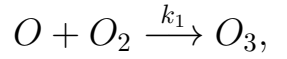
2. Найдите стационарное решение (особые точки) системы. Обозначьте его на построенных графиках. Рассмотрите как случаи, когда  $b > 1 + a^2$ , так и  $b < 1 + a^2$ .

3. Реализуйте процедуру численного анализа полученного решения с целью выяснения его периодичности. При положительном результате определите период колебаний концентрации каждого из реагентов  $X$  и  $Y$ . Зная точность решения задачи Коши, оцените точность определения периодов.

4. Численно исследуйте устойчивость колебательных траекторий. Для этого следует провести расчет (и вывести графики) двух решений с мало отличающимися начальными данными и проанализировать норму разности полученных решений.

## 18. Концентрация озона в атмосфере

Генерация и распад трехатомного кислорода (озона) в нижних слоях тропосферы осуществляется по следующей схеме.



Над стрелками надписаны коэффициенты скоростей соответствующих реакций, которые равны  $k_1 = 1.63 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с}$ ,  $k_2 = 4.66 \cdot 10^{-16} \text{ см}^3/\text{с}$ ,

$$k_i = \begin{cases} \exp(-c_i/\sin \omega t), & \sin \omega t > 0 \\ 0, & \sin \omega t \leq 0 \end{cases} \quad (i = 3, 4) \text{ см}^3/\text{с}, \quad \omega = \pi/43200, \quad c_3 =$$

22.62,  $c_4 = 7/601$ ,  $t$  – время в секундах ( $t = 0$  соответствует рассвету усредненного 12-ти часового дня).

Пусть  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  – концентрации  $O$ ,  $O_2$  и  $O_3$  соответственно в момент времени  $t$ . Их изменение со временем описывается следующей системой ОДУ, для которой ставится задача Коши.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1xy - k_2xz + 2k_3(t)y + k_4(t)z, \\ \frac{dy}{dt} = -k_1xy + 2k_2xz - k_3(t)y + k_4(t)z, \\ \frac{dz}{dt} = k_1xy - k_2xz - k_4(t)z, \\ x(0) = 10^6, \quad y(0) = 3.7 \cdot 10^{16}, \quad z(0) = 10^{12}. \end{cases}$$

1. Решите численно полученную задачу. Расчет проводите до окончания первых суток. Постройте графики зависимости решения  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  от времени.

2. Сравните качественно решения, полученные с помощью явного и неявного методов одного порядка точности, оцените погрешность (по Рунге) полученных решений.

3. Зная точность найденного решения к концу первых суток, определите, является ли численное решение периодическим.

## Динамика популяций

### 19. Модель Вольтерра – Лотки

Динамика численности двух видов, один из которых является пищевым ресурсом другого (хищников и жертв), описывается следующей системой дифференциальных уравнений (модель Вольтерра – Лотки).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by), \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - dx), \end{cases}$$

Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  – численность жертв и хищников соответственно.

Коэффициенты  $a$  и  $c$  характеризуют скорость прироста жертв и убыли хищников при отсутствии межвидовых контактов (при изолированном проживании). Предполагается, что корм для популяции жертв имеется в неограниченном количестве, поэтому каждое следующее поколение в идеальных условиях будет в  $a$  раз больше предыдущего. Хищники, наоборот, будут лишены корма при изолированном проживании и даже размножение не спасет их от голодной смерти (предполагается, что жертвы – их единственно возможная пища). Поэтому слагаемое  $ax$  входит в правую часть со знаком плюс, а слагаемое  $cy$  – со знаком минус. Вторые слагаемые в правых частях моделируют процесс встречи жертвы с хищником. С одной стороны, встреча с хищником не всегда заканчивается трапезой. С другой, для выживания хищника может быть недостаточно одной такой встречи. За соответствующую убыль жертв и прирост хищников отвечают коэффициенты  $b$  и  $d$ . Все коэффициенты положительны.

1. Найдите численное решение задачи Коши при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

2. Постройте графики зависимости решения  $x(t)$  и  $y(t)$  от времени, а также фазовый портрет (в переменных  $x$ ,  $y$ ).

3. Попробуйте подобрать значения коэффициентов, при которых происходит циклическое изменение численности популяций.

4. Приблизительно определите длительность цикла, полученного в п. 3. (усреднением по достаточно большому количеству циклов). Используя информацию о точности решения задачи Коши, оцените точность рассчитанного периода циклов.

5. Найдите (аналитически) стационарные решения системы. Попробуйте подобрать значения коэффициентов, при которых решение выходит на стационарный режим.

## 20. Модель Холлинга – Тэннера

Модель Холлинга – Тэннера описывает взаимодействие популяций хищников и жертв и представляет собой следующую систему ОДУ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{\omega xy}{D + x}, \\ \frac{dy}{dt} = S \left(1 - \frac{Jy}{x}\right) y, \end{cases}$$

Здесь  $x$ ,  $y$  – численность популяций жертв и хищников,  $J$  – количество жертв, необходимое для насыщения одного хищника,  $r$ ,  $K$ ,  $S$ ,  $D$  – коэффициенты прироста и внутривидового влияния. Все коэффициенты положительны.

Данная модель более адекватно моделирует процесс взаимодействия популяций, чем модель Вольтерра – Лотки, описанная в предыдущем пункте. Там же можно найти комментарии по поводу биологического смысла некоторых коэффициентов системы.

1. Найдите (аналитически) стационарные решения системы.
2. Поставьте для заданной системы задачу Коши, найдите ее численное решение при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов с заданной точностью  $\varepsilon$ . Вычисления следует проводить до заданного пользователем момента времени  $T$ .
3. Постройте графики зависимости решения  $x(t)$  и  $y(t)$  от времени, а также фазовый портрет системы (в переменных  $x$ ,  $y$ ). Обозначьте на графиках стационарное решение.
4. Попробуйте подобрать такие значения коэффициентов, при которых происходит циклическое изменение численности популяций, и такие, при которых решение выходит на стационарное.
5. Приблизительно определите длительность цикла, полученного в п. 4. (усреднением по достаточно большому количеству циклов). Используя информацию о точности решения задачи Коши, оцените точность рассчитанного периода циклов.

## 21. Динамика конкурирующих популяций

Динамика численности двух видов, потребляющих (конкурирующих за) один и тот же ресурс, описывается следующей системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r_1 - k_1x - a_2y), \\ \frac{dy}{dt} = y(r_2 - k_2x - a_1y), \end{cases}$$

Здесь  $x$ ,  $y$  – численность популяций,  $r_i$  – коэффициент прироста  $i$ -го вида,  $k_i$  – коэффициент, описывающий внутривидовое влияние,  $a_i$  – коэффициент, описывающий влияние со стороны другого вида. Все коэффициенты положительны.

Система близка к модели Вольтерра – Лотки, описанной выше. Биологический смысл коэффициентов описан там же. Дополнительно здесь возникают третьи слагаемые в уравнениях, отражающие тот факт, что использование ресурса популяцией  $y$  мешает использованию того же ресурса популяцией  $x$  и наоборот. Это отрицательно сказывается на численности популяции, что отражено соответствующим знаком слагаемых.

В качестве примера такой системы можно рассмотреть стадо овец и стадо коз, всегда пасущиеся на одном лугу. Или две группы студентов, которые готовятся к экзаменам по одним и тем же учебникам, имеющимся в библиотеке в недостаточном количестве.

1. Поставьте для данной системы задачу Коши, найдите ее численное решение при различных начальных данных и различных значениях коэффициентов  $r_i$ ,  $k_i$ ,  $a_i$  с точностью  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$ . Вычисления следует проводить до заданного пользователем момента времени  $T$ .

2. Постройте графики зависимости решения  $x(t)$  и  $y(t)$ , а также фазовый портрет системы (в переменных  $x$ ,  $y$ ).

3. Исследуйте устойчивость найденного решения. Для этого необходимо дважды решать задачу Коши с начальными данными, отличающимися на малую величину  $\delta_0$  и затем сравнивать погрешность решения  $\varepsilon$  с погрешностью исходных данных  $\delta_0$ .

4. Зафиксируйте значения всех параметров кроме одного. Проведите численный эксперимент для выяснения влияния свободного параметра на характер решения системы. Можно ли найти момент (критическое значение параметра), при котором решение от монотонного переходит к колебательному и момент, при котором затухающие колебания переходят в периодические?

## 22. Производство оптоволокна

Оптическое волокно производят из силиконовых прутков пропуская их через горячую печь. В этом случае прутки размягчаются и превращаются в оптоволокно существенно меньшего диаметра. Пусть печь нагрета до температуры 2300 К. В наличии имеются прутки длиной 25 и радиусом 1.2 см. Дифференциальные уравнения, описывающие происходящие в прутках изменения, имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}s(x) = -\frac{1}{u_0}f(t(x))s(x), \\ \frac{d}{dx}t(x) = -\frac{C}{u_0}s(x)(t^4(x) - t_f^4). \end{cases}$$

Здесь  $t_f$  – температура печи,  $u_0$  – скорость (в см/сек), с которой прутки движутся через печь, а функция

$$f(t) = \begin{cases} Be^{A(T-t)}, & t > T, \\ 0, & t \leq T, \end{cases}$$

где  $T$  – критическая температура, при которой силиконовые прутки начинают размягчаться. Примем ее равной 1900 К. Константы  $A$ ,  $B$  и  $C$ , характеризующие детали технологического процесса возьмем равными  $A = 1$ ,  $B = 0.1$ ,  $C = 10^{-11}$ .

Эти уравнения описывают изменения радиуса  $s$  (в см) и температуры  $t$  (в К) оптического волокна. Пусть требуется получить оптоволокно радиуса 0.1 мм.

1. Поставьте задачу Коши, найдите ее численное решение при различных значениях скорости  $u_0$  (задается пользователем). Вычисления следует проводить в течение указанного времени. При этом следует отмечать момент достижения нужного радиуса.

2. Постройте графики зависимости радиуса и температуры от времени, а также фазовый портрет системы в переменных  $(s, t)$ .

3. Определите скорость прохождения прутков через печь, при которой получается продукция требуемого радиуса.

## 23. Химическая безопасность

У цеховых работников некоторого химзавода может развиваться профзаболевание. Завод производит химикат  $C$  из двух компонентов –  $A$  и  $B$  в химическом реакторе. Однако в процессе производства некоторое количество образующегося вещества  $C$  вступает в реакцию с остающимся сырьем  $B$ , и получается компонент  $D$ , являющийся токсичным. Но этот компонент неустойчив. Через непродолжительное время  $D$  распадается на  $A$  и  $B$ . Если  $a, b, c, d$  – соответственно концентрации веществ  $A, B, C$  и  $D$  в реакторе, то дифференциальные уравнения, описывающие реакцию химического процесса имеют следующий вид.

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \lambda_1 d - \frac{\lambda_3}{2} a b, \\ \frac{db}{dt} = \lambda_2 d - \frac{\lambda_3}{2} a b - \frac{\lambda_4}{2} b c, \\ \frac{dc}{dt} = \lambda_3 a b - \frac{\lambda_4}{2} b c, \\ \frac{dd}{dt} = \lambda_4 b c - (\lambda_1 + \lambda_2) d. \end{cases}$$

Коэффициенты реакций равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2$ ,  $\lambda_3 = 8$ ,  $\lambda_4 = 10$ . При запуске процесса реагенты  $A$  и  $B$  загружаются в реактор в одинаковом количестве. Никаких других веществ в начальный момент там нет.

Технологический цикл длится 10 часов. По прошествии этого времени химический реактор очищается и процесс запускается вновь.

Если в какой-то момент времени концентрация  $D$  превышает концентрацию  $C$ , то некоторое количество вещества  $D$  может вытекать из реактора, отравляя окружающую атмосферу и приводя к заболеванию.

1. Поставьте задачу Коши для приведенной системы ОДУ, найдите численно ее решение на 10-ти часовом интервале времени. Дайте оценку точности полученных решений.

2. Постройте графики зависимости концентрации веществ от времени. Постройте фазовые портреты системы (в координатах  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  и т.д.)

3. Определите, существуют ли критические моменты времени, в которые концентрация компонента  $D$  превышает концентрацию  $C$

4. Если такой момент времени существует, считайте, что излишек вещества  $D$  выходит наружу мгновенно. Внесите соответствующие изменения в расчетные формулы метода.

5. Исследуйте зависимость критических моментов от параметров  $\lambda_k$ .



## 24. Распространение звука в воде

Распространение волн в среде, в которой скорость распространения колебаний переменна, описывается следующей задачей Коши

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{c'(z)}{A^2 c^3(z)}, & A = \frac{\cos \theta_0}{c(z_0)}, \\ z(0) = z_0, \\ \frac{dz}{dx}(0) = \operatorname{tg} \theta_0. \end{cases}$$

В ней  $z(x)$  – глубина положения фронта волны ( $z = 0$  соответствует поверхности, ось  $z$  направлена вниз),  $x$  – положение фронта в горизонтальном направлении,  $\theta_0$  – угол испускания волны по отношению к горизонту. Скорость распространения волн  $c(z)$  в морской воде задается следующей таблицей

$z$ (м)	$c(z)$ (м/с)	$z$ (м)	$c(z)$ (м/с)	$z$ (м)	$c(z)$ (м/с)
0	1.537	900	1.483	2400	1.499
150	1.523	1050	1.484	2700	1.503
300	1.509	1200	1.486	3000	1.508
450	1.490	1500	1.486	3300	1.514
600	1.484	1800	1.489	3600	1.521
750	1.482	2100	1.495	3900	1.522

1. Реализуйте две процедуры восстановления значений функции  $c(z)$ , используя локальный сплайн первого порядка (в первой) или кубический сплайн дефекта 1 с условием отсутствия узла (во второй).

2. Для начальных значений  $-10^\circ < \theta_0 < 10^\circ$  с шагом  $\Delta\theta = 1^\circ$  постройте таблицу значений  $z(x_M, \theta_0)$ , где  $z_0 = 600$  м,  $x_M = 50$  км с пятью верными знаками после запятой. В ответе следует выдавать только верные цифры.

3. Пусть на глубине 3500 м находится дно, которое поглощает все звуковые волны, а на поверхности происходит полное отражение звуковой волны (по законам геометрической оптики). Для начальных значений из п. 3. постройте траектории звуковых лучей. Расчеты следует производить с заданной пользователем точностью.

## 25. Геометрическая прогулка

Господин Сам Жуй, большой поклонник фэн-шуй, а также хороший знаток математики, любит прогуливаться по парку прямоугольной формы по необычным траекториям. Для получения траектории необходимо решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x \left( \alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \right), \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \left( \alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \right), \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Входящий в систему параметр  $\alpha$  может принимать любые значения из отрезка  $[1, 6]$ . При этом вся траектория находится внутри некоторого ограниченного множества.

1. Реализуйте процедуру численного решения задачи Коши при различных значениях  $\alpha$  (задается пользователем). Вычисления следует проводить в течение указанного времени и выдавать информацию о точности полученного решения.

2. Постройте графики зависимости координат  $x$  и  $y$  от времени, а также фазовый портрет (траекторию) в переменных  $(x, y)$ .

3. Выясните, становятся ли со временем получаемые траектории почти замкнутыми. Почти замкнутой будем называть траекторию, которая неограниченное число раз возвращается в малую окрестность одной из своих точки. Размер этой малой окрестности задает пользователь.

Для траекторий, выходящих на почти замкнутую.

4. Определите минимальный размер прямоугольника, внутри которого располагается траектория.

5. Реализуйте процедуру численного интегрирования и найдите с ее помощью площадь, ограниченную почти периодической частью траекторией. Не забудьте указать погрешность найденного значения.

6. Найдите значение параметра  $\alpha$  из указанного диапазона, при котором площади, остающиеся по левую и по правую руку господина Сам Жуйя наименее отличаются друг от друга.

## 26. Дополнительные пути прогулок

Задания предыдущего раздела можно дословно повторить для других систем дифференциальных уравнений.

Ниже приводятся две такие системы с начальными условиями, а также подходящий диапазон изменения параметра.

$$1. \begin{cases} x' = x - y - \alpha x (x^2 + y^2), \\ y' = x + y - \alpha y (x^2 + y^2), \\ x(0) = 0.1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\alpha \in [1, 6].$$

$$2. \begin{cases} x' = x^2 y - 2.5x + 0.5, \\ y' = 1.5x - \alpha x^2 y, \\ x(0) = 0.5, \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

$$\alpha \in [1, 7].$$

## Пример формулировки задания

1. Базовую часть задания составляет решение задачи Коши для системы ОДУ 1-го порядка.

Эту задачу следует решать методом Рунге-Кутты 3-го порядка. Расчетные формулы метода следует предварительно вывести (это одновременно будет являться и обоснованием порядка аппроксимации). Три основных параметра метода заданы в таблице ниже. Это параметры, определяющие узлы интегрирования на шаге  $(t_i, t_i + \alpha_1 h, t_i + \alpha_2 h, h = t_{i+1} - t_i)$ .

N	$\alpha_1$	$\alpha_2$	N	$\alpha_1$	$\alpha_2$	N	$\alpha_1$	$\alpha_2$	N	$\alpha_1$	$\alpha_2$	N	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	0.1	0.5	7	0.1	0.75	13	0.1	0.25	19	0.1	0.3	25	0.1	0.8
2	0.5	0.5	8	0.25	0.5	14	0.1	0.5	20	0.4	0.5	26	0.3	0.5
3	0.25	0.75	9	0.25	0.4	15	0.25	0.25	21	0.25	0.8	27	0.25	0.6
4	0.25	1	10	0.5	1	16	0.75	1	22	1	1	28	0.1	1
5	0.1	0.2	11	0.3	0.4	17	0.5	0.6	23	0.7	0.8	29	0.8	0.9
6	0.75	0.75	12	0.4	0.4	18	1/3	2/3	24	1/3	1/3	30	1/6	1/3

Пример такого вывода для метода 2-го порядка можно посмотреть, например, в [1, §14.6, п. 3].

2. Необходимо определить примерные границы шага интегрирования, обеспечивающего устойчивость метода. Для этого написать линейную систему ОДУ первого приближения вида  $\vec{y}' = A\vec{y}$  и воспользоваться формулой  $h \leq \frac{2.5}{\max \operatorname{Re}(\lambda_i)}$ , в которой  $\{\lambda_i\}$  – собственные числа матрицы  $A$ .

3. Используя правило Рунге апостериорной оценки погрешности и идеи построения адаптивных процедур, организовать численный расчет, дающий решение с указанной в задании точностью  $\varepsilon$ .

4. Выполнить основное задание работы. Непосредственный метод решения этой части работы (поиск максимума, корня скалярной функции, вычисления интеграла и т.д.) в задании не указан. Его нужно предложить (с обоснованием) самостоятельно по материалам, изученным ранее.

## Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М: Издательский дом МЭИ, 2003.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. МГУ, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. М. Наука. 1978.
5. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение. М: Мир, 1998.

## Содержание

Введение	3
Движение в атмосфере Земли (баллистика)	
1. Разлет осколков	4
2. Затяжной прыжок	5
3. Детективный сюжет	6
4. Парижская пушка	7
5. Реактивный снаряд	8
6. Упругий мяч	9
Движение в гравитационном поле	
7. Движение в центральном поле	10
8. Притяжение двух тел	11
9. Комета Галлея	12
10. Прилунение.	13
11. Планета двойной звезды	14
12. От Земли до Луны	15
13. Астронавигация	16
Колебания	
14. Затухающие колебания	17
15. Колебания на двух пружинах	18
16. Маятник Фуко	19
17. Автоколебания в химических реакциях	20
18. Концентрация озона в атмосфере	21
Динамика популяций	
19. Модель Вольтерра – Лотки	22
20. Модель Холлинга – Тэннера	23
21. Динамика конкурирующих популяций	24
Разное	
22. Производство оптоволокна	25
23. Химическая безопасность	26
24. Распространение звука в воде	27
25. Геометрическая прогулка	28
26. Дополнительные пути прогулок	29
Пример формулировки задания	30
Литература	31